

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

多变量微积分笔记1——偏导数

在一元函数中，我们已经知道导数就是函数的变化率。对于二元函数我们同样要研究它的“变化率”。

在xOy平面内，当动点由 $P(x_0,y_0)$ 沿不同方向变化时，函数 $f(x,y)$ 的变化快慢一般说来是不同的，因此就需要研究 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处沿不同方向的变化率。

在这里我们只学习函数 $f(x,y)$ 沿着平行于x轴和平行于y轴两个特殊方位变动时， $f(x,y)$ 的变化率。

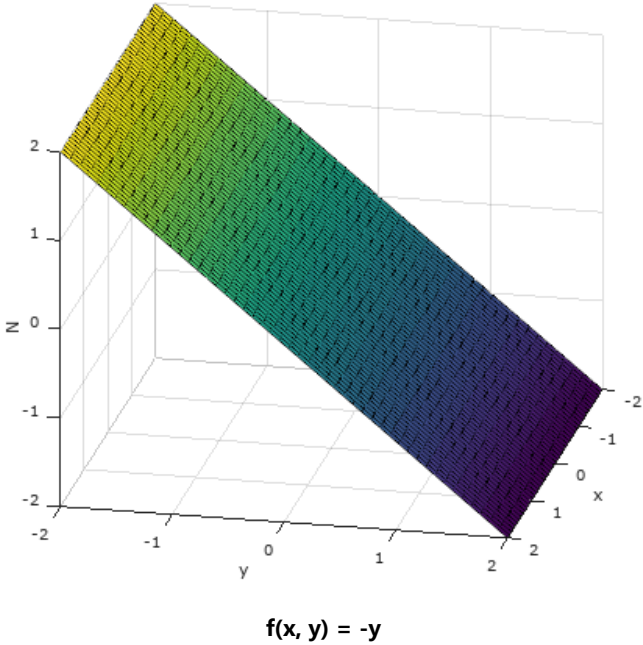
偏导数的表示符号为： ∂ ，全导数符号d的变体。

偏导数反映的是函数沿坐标轴正方向的变化率。

三维空间的函数

曲面

三维空间的函数可以用 $z = f(x, y)$ 表示，如果把 $f(x, y)$ 中的两个变量图像化，将得到空间的某个曲面（三维空间的图像很难在纸上画出来，画图的工作还是交给计算机好了）：



随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

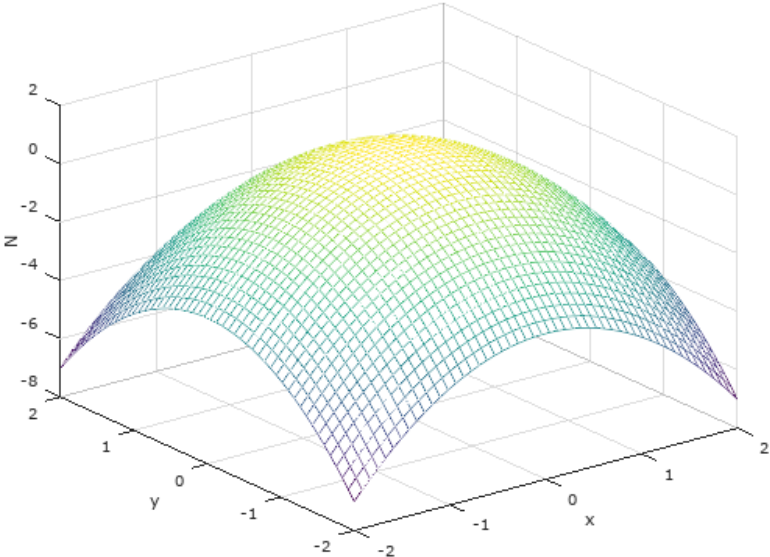
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

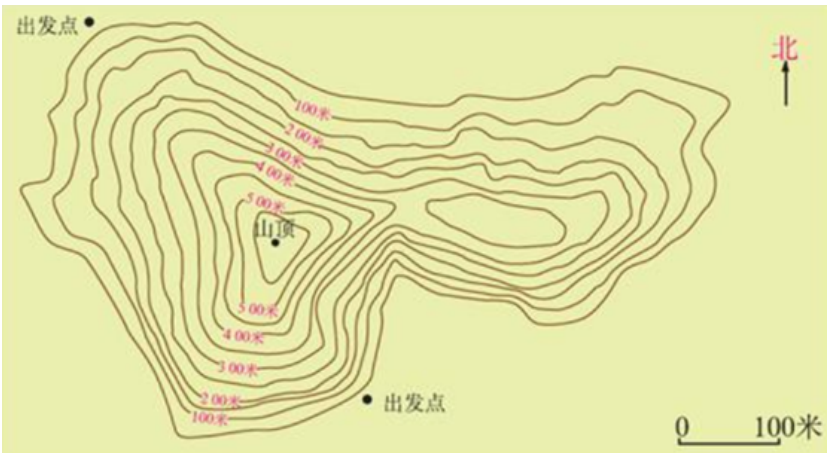


$$f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$$

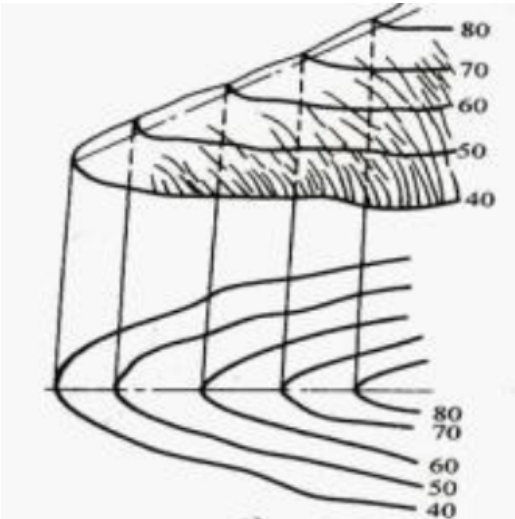
等高线

平面直角坐标系中, 通过(x, y)可以定位任意位置, 在此基础上, 可以借助等高线描述第三个维度。

实际上我们对等高线并不陌生:

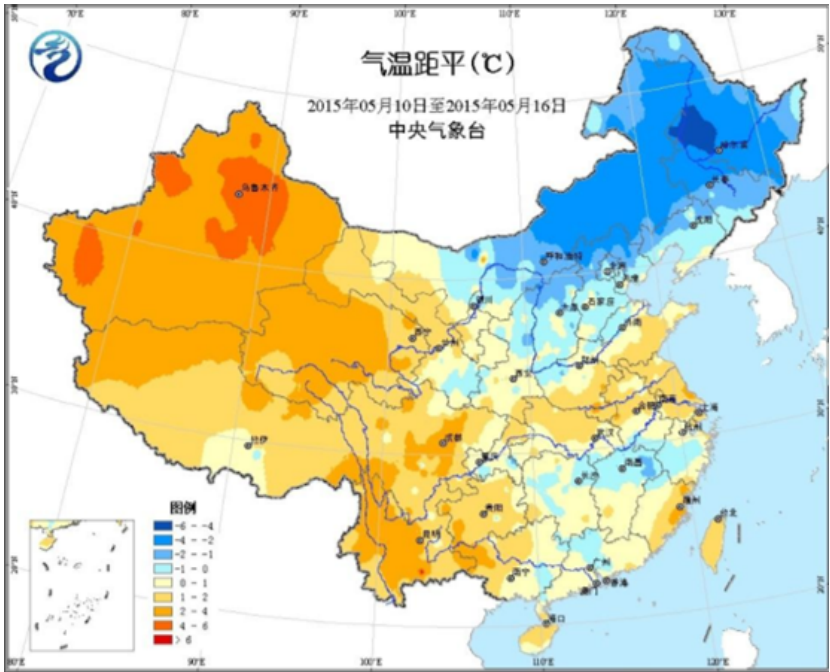


如果你在爬山, 沿着等高线会从山的一点走到另一点, 行走过程中海拔不变, 这相当于把高度映射到了平面上:



实际上第三个维度也可以用颜色表示, 比如常见的气温图:

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系
--trustInU

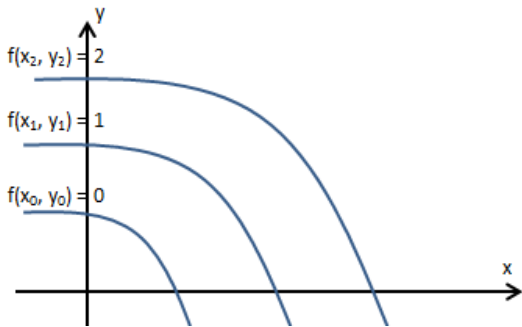


两个不同颜色之间其实就是一个函数的等高线，把颜色换成线条就变成了地理上学过的等温线：给定经纬度，输出温度，即 $z = f(x, y)$

偏导数

什么是偏导数

现在有下图的等高线：



很容易得出下面的结论：

当 x 增大时， z 增大， x 减小， z 减小；当 y 增大时， z 增大， y 减小， z 减小。如果试图分析 f 的变化速度，就需要用到导数，只不过这次是对含有两个变量的函数求导，也就是所谓的求偏导。

偏导中的“偏”，指仅对其中一个变量求导，而不管另外的变量（偏导是partial derviatives，partial翻译成“部分”也许更好理解），因此，一个多变量的函数没有通常的导数，它只有关于每个变量的偏导数。与单变量函数的导数相似，偏导数的公式：

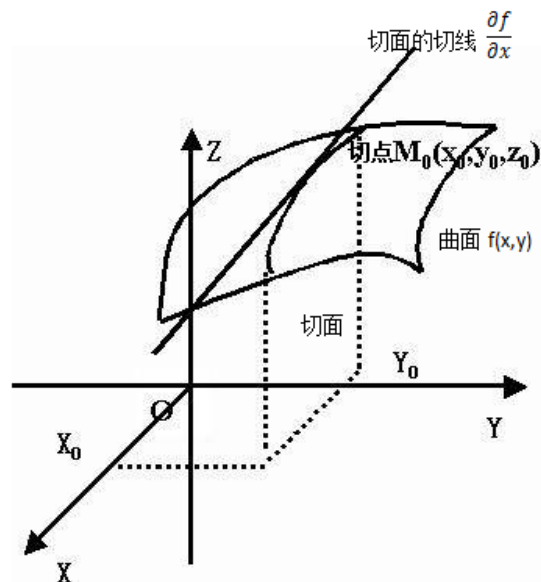
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

上面就是求 $f(x, y)$ 在 x_0 和 y_0 处的偏导。以第一个式子为例，在这里，并没有改变 y 的值，仅仅改变 x ，然后观察函数的变化率。

偏导数的几何意义

偏导数表示固定面上一点的切线斜率。

在 $z = f(x, y)$ 中，如果保持 y 不变，那么 f 将依赖于 x 的变化，这将得到一个和 xz 平行的平面 p ， p 与 $f(x, y)$ 平面切面的交线就是曲线 $f(x, y_0)$ ，偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是交线上一点对 x 轴的切线的斜率，当然它也只能对 x 轴，此时的切线和 y 轴没什么关系。如果保持 x 不变，就是 y 的偏导，偏导数 $f'_y(x_0, y_0)$ 就是交线上一点对 y 轴的切线的斜率。



偏导数的计算

偏导的计算和单变量导数类似，只是把其中一个变量看成常量。

$$f(x, y) = x^3 y + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 3x^2 y + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = x^3 + 2y$$

两个偏导分别将 y 和 x 看作常数。

二阶偏导

二阶偏导就是求偏导的偏导，过程和求偏导类似，将另一个变量看作常数：

$$f(x, y) = x^3 y + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2y$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(3x^2 y)}{\partial x} = 6xy$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(x^3 + 2y)}{\partial y} = 2$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = 3x^2$$

对x的偏导表示在x方向的斜率，对x的二阶偏导就是斜率的变化率，也就是斜率的变化率快慢，这同单变量函数的二阶导数类似。

近似

在单变量函数中，假设一般函数上存在点 $(x_0, f(x_0))$ ，当x接近基点 x_0 时，可以使用函数在 x_0 点的切线作为函数的近似线。函数 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 即称为函数f在 x_0 点的线性近似或切线近似。在多变量函数中也同样有近似的概念。关于近似的更多内容，可参考《[数学笔记6——线性近似和二阶近似](#)》

对于函数 $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad (x \text{ is var}, y \text{ is const})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y \quad (y \text{ is var}, x \text{ is const})$$

偏导表示变化率，对于x的偏导，函数变化程度是 f_x ，对于y的偏导，函数变化程度是 f_y ，如果同时改变x和y两个变量，变化程度就是两个效果的累加。如果x和y同时变化了 Δx 和 Δy ，那么 $z = f(x, y)$ 的值将会改变 Δz :

$$\Delta z \approx \Delta x f_x + \Delta y f_y$$

z在 $f(x_0, y_0)$ 附近的近似:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z \approx f(x_0, y_0) + \Delta x f_x + \Delta y f_y$$

这就是将两个变量同时加以扰动，从而对函数造成影响。

上面的公式在 f_x 和 f_y 都是0的情况下就变成了 $f(x_0 + \Delta, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0)$ ，这看起来不怎么好，此时就需要用到二阶偏导:

$$\Delta z \approx \frac{1}{2} \Delta x^2 f_{xx} + \Delta x \Delta y f_{xy} + \frac{1}{2} \Delta y^2 f_{yy}$$

z在 $f(x_0, y_0)$ 附近的近似:

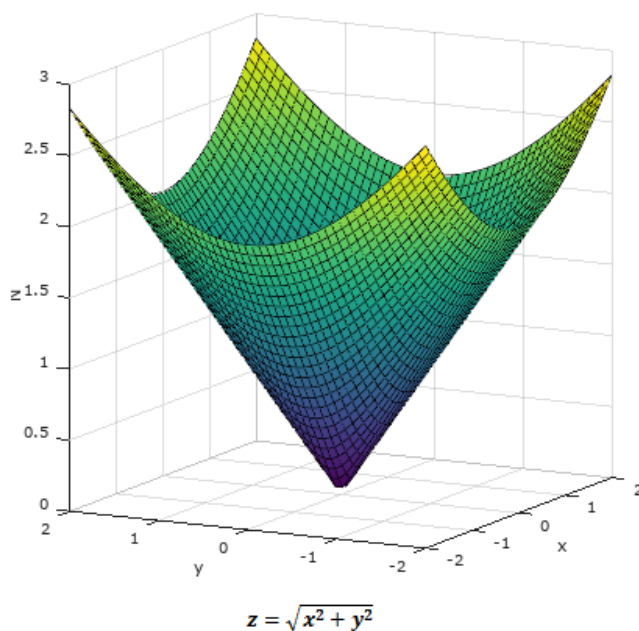
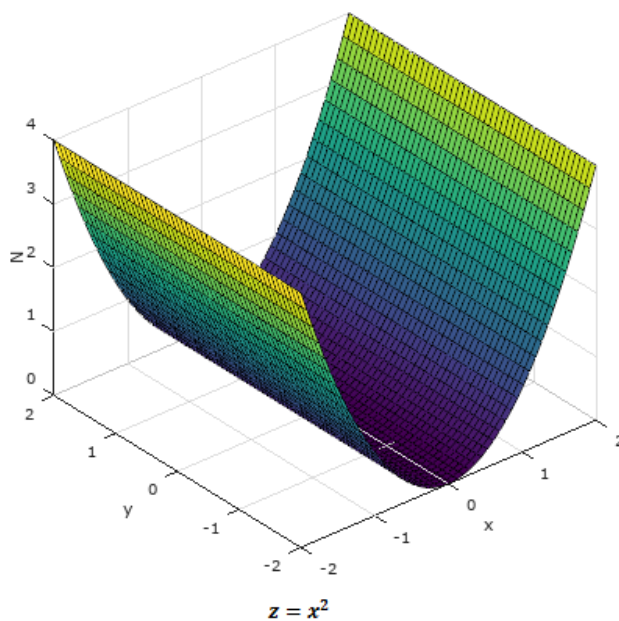
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z$$

$$\approx \frac{1}{2} \Delta x^2 f_{xx} + \Delta x \Delta y f_{xy} + \frac{1}{2} \Delta y^2 f_{yy}$$

示例

示例1

为 $z = x^2$ 和 $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ 两条曲线构图。



示例2

$$f(x, y) = xy^2 + x^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ? \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = ?$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2^2 + 2 \times 1 \times 2 = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(y^2 + 2xy)}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial(y^2 + 2xy)}{\partial y} = 2y + 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} = \frac{\partial(2xy + x^2)}{\partial x} = 2y + 2x$$

示例3

矩形的长和宽分别是 x 和 y ，当 $x = 2.1$ ， $y = 2.8$ 时计算矩形的面积。

可以很容易计算出确切的数值：

$$Area = xy = 2.1 \times 2.8 = 5.88$$

下面尝试用偏导的近似去计算：

$$x_0 = 2, \Delta x = 0.1, \quad y_0 = 3, \Delta y = -0.2$$

$$f(x, y) = xy, \quad f_x = \frac{\partial(xy)}{\partial x} = y, \quad f_y = \frac{\partial(xy)}{\partial y} = x$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

$$\approx f(x_0, y_0) + \Delta x f_x|_{(x_0, y_0)} + \Delta y f_y|_{(x_0, y_0)}$$

$$= f(2, 3) + 0.1 f_x|_{(2, 3)} - 0.2 f_y|_{(2, 3)}$$

$$= 2 \times 3 + 0.1 \times 3 - 0.2 \times 2$$

$$= 5.9$$

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [偏导数](#), [等高线](#), [二阶偏导](#)

好文要顶

关注我

收藏该文

[我是8位的](#)
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

3

推荐

0

反对

« 上一篇: [线性代数笔记6——直线和曲线的参数方程](#)

» 下一篇: [水乡苏州](#)

posted on 2018-01-15 20:31 [我是8位的](#) 阅读(11850) 评论(2) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告

yo zodcs.com

永中DCS, 文档在线
预览处理专家

10年行业经验, 受到众多政府客户、央企
单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、
教育客户青睐

了解详情 >

- 编辑推荐:
- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
 - 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
 - ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
 - .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
 - 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

- 最新新闻:
- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
[博客园](#)

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes